50 データの分析

414

(1)

国語の得点が 4 点である生徒の数学の得点の中央値と最頻値

中央値

国語の得点が 4 点である生徒は 12 人である。

したがって，6 番目の得点と 7 番目の得点の平均が中央値である。

よって，$\dfrac{3+4}{2}=3.5$ 点

最頻値

3 点

数学の得点が 2 点である生徒の国語の得点の標準偏差

国語の平均点は$\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 5+4\cdot 1}{2+5+1}=2$ 点

よって，標準偏差は$\sqrt{\dfrac{2\cdot(1-2)^2+5\cdot(2-2)^2+1\cdot(4-2)^2}{2+5+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 点

(2)

国語の平均点と標準偏差

平均点：$\dfrac{1\cdot 5+2\cdot 12+3\cdot 6+4\cdot 12+5\cdot 5}{40}=3$ 点

標準偏差：$\sqrt{\dfrac{5\cdot(1-3)^2+12\cdot(2-3)^2+6\cdot(3-3)^2+12\cdot(4-3)^2+5\cdot(5-3)^2}{40}}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}$

数学の平均点と標準偏差

平均点：$\dfrac{1\cdot 6+2\cdot 8+3\cdot 12+4\cdot 8+5\cdot 6}{40}=3$ 点

標準偏差：$\sqrt{\dfrac{6\cdot(1-3)^2+8\cdot(2-3)^2+12\cdot(3-3)^2+8\cdot(4-3)^2+6\cdot(5-3)^2}{40}}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}$

共分散

国語の得点が 3 点または数学の得点が 3 点の生徒は平均点との差が 0 となり，

共分散に寄与しない。

よって，

$$\begin{aligned}&(1-3)(1-3)\cdot 3+(1-3)(2-3)\cdot 2+(2-3)(1-3)\cdot 2+(2-3)(2-3)\cdot 5+(2-3)(4-3)\cdot 3\\&\quad+(4-3)(2-3)\cdot 1+(4-3)(4-3)\cdot 3+(4-3)(5-3)\cdot 3+(5-3)(4-3)\cdot 2+(5-3)(5-3)\cdot 2\\&=42\end{aligned}$$

より，共分散は$\dfrac{42}{40}=\dfrac{21}{20}$

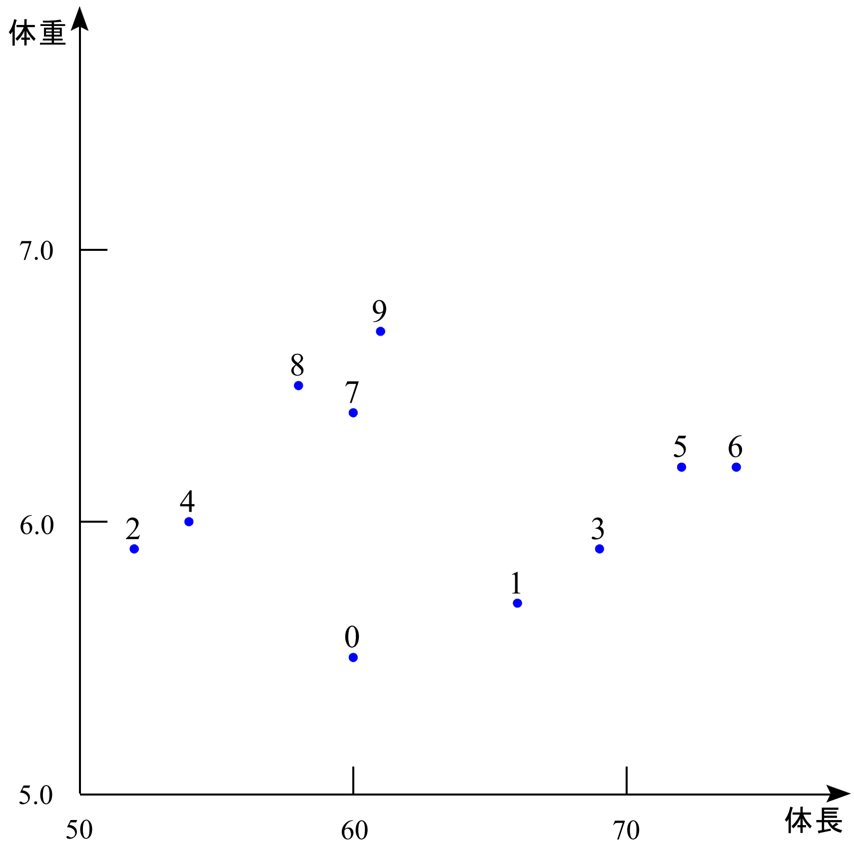
以上より，相関係数は $\dfrac{\dfrac{21}{20}}{\sqrt{\dfrac{8}{5}}\sqrt{\dfrac{8}{5}}}=\dfrac{21}{32}=0.65625$

415

(1)

下図より，0，1，3，5，6

体長の平均値 $\dfrac{60+66+69+72+74}{5}=68.2$



(2)

解法 1

体長の偏差の 2 乗の和の平方根を s とすると，相関係数が 0.95 以上 1 以下だから，

$0.95\leq\dfrac{\dfrac{6.6}{5}}{\dfrac{0.62}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{s}{\sqrt{5}}}\leq 1$ より， $\dfrac{6.6}{0.62}\leq s\leq\dfrac{6.6}{0.62\cdot 0.95}$ $\quad\therefore 10.6<s<11.2$

ゆえに，求める値は 11

解法 2

$$\sqrt{(60-68.2)^2+(66-68.2)^2+(69-68.2)^2+(72-68.2)^2+(74-68.2)^2}$$
$$=\sqrt{8.2^2+2.2^2+0.8^2+3.8^2+5.8^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{41}{5}\right)^2+\left(\frac{11}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{5}\right)^2+\left(\frac{29}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{120.8}$$

これと，$10.5^2<120.8<11^2$ より，求める値は 11

416

$$\bar{x}=\frac{2na+nb}{2n}=\frac{2a+b}{3}$$

$$\therefore s=\sqrt{\frac{2n(a-\bar{x})^2+n(b-\bar{x})^2}{3n}}$$
$$=\sqrt{\frac{2n\left(a-\frac{2a+b}{3}\right)^2+n\left(b-\frac{2a+b}{3}\right)^2}{3n}}$$
$$=\sqrt{\frac{2\left(\frac{a-b}{3}\right)^2+4\left(\frac{a-b}{3}\right)^2}{3}}$$
$$=\sqrt{2}\left|\frac{a-b}{3}\right|$$
$$=\frac{\sqrt{2}(b-a)}{3}$$

よって，

a 点を取った学生の偏差値

$$50+10\times\frac{a-\frac{2a+b}{3}}{\frac{\sqrt{2}(b-a)}{3}}=50-5\sqrt{2}$$

b 点を取った学生の偏差値

$$50+10\times\frac{b-\frac{2a+b}{3}}{\frac{\sqrt{2}(b-a)}{3}}=50+10\sqrt{2}$$

417

(1)

$$\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x_k=5.5 \quad \overline{y}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}y_k=7.5 \quad \overline{z}=2\overline{x}+3=14 \quad \overline{w}=\overline{y}-4=3.5$$

(2)

$$\begin{aligned}
{s_x}^2&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(x_k-\overline{x})^2\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\left\{{x_k}^2-2x_k\overline{x}+(\overline{x})^2\right\}\\
&=\frac{1}{10}\left\{\sum_{k=1}^{10}{x_k}^2-2\sum_{k=1}^{10}\overline{x}x_k+\sum_{k=1}^{10}(\overline{x})^2\right\}\\
&=\frac{1}{10}\left\{\sum_{k=1}^{10}{x_k}^2-2\overline{x}\sum_{k=1}^{10}x_k+10(\overline{x})^2\right\}\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}{x_k}^2-2\overline{x}\cdot\left(\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x_k\right)+(\overline{x})^2\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}{x_k}^2-2\overline{x}\cdot\overline{x}+(\overline{x})^2\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}{x_k}^2-2(\overline{x})^2+(\overline{x})^2\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}{x_k}^2-(\overline{x})^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}{x_k}^2=10\left\{{s_x}^2+(\overline{x})^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
s_{xy}&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(x_ky_k-\overline{y}x_k-\overline{x}y_k+\overline{x}\cdot\overline{y})\\
&=\frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{10}x_ky_k-\sum_{k=1}^{10}\overline{y}x_k-\sum_{k=1}^{10}\overline{x}y_k+\sum_{k=1}^{10}\overline{x}\,\overline{y}\right)\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x_ky_k-\overline{y}\left(\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x_k\right)-\overline{x}\left(\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}y_k\right)+\overline{xy}\\
&=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}x_ky_k-\overline{x}\,\overline{y}
\end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}x_ky_k=10\left(s_{xy}+\overline{x}\,\overline{y}\right)$$

(3)

(2)と同様にして，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} {y_k}^2 = 10\left\{{s_y}^2 + (\overline{y})^2\right\}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} {z_k}^2 = 10\left\{{s_z}^2 + (\overline{z})^2\right\}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} {w_k}^2 = 10\left\{{s_w}^2 + (\overline{w})^2\right\}$，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} z_k w_k = 10\left(s_{zw} + \overline{z}\,\overline{w}\right)$が成り立つ。

よって，

$$ {s_x}^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} {x_k}^2 - (\overline{x})^2 = \frac{1}{10}\cdot 385 - 5.5^2 = 8.25 $$

$$ {s_y}^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} {y_k}^2 - (\overline{y})^2 = \frac{1}{10}\cdot 645 - 7.5^2 = 8.25 $$

$$ s_x s_y = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k y_k - \overline{x}\,\overline{y} = \frac{1}{10}\cdot 445 - 5.5\cdot 7.5 = 3.25 $$ ・・・(答)

$$ \begin{aligned} {s_z}^2 &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} {z_k}^2 - (\overline{z})^2 \\ &= \frac{1}{10}\cdot\sum_{k=1}^{10}(2x_k+3)^2 - 14^2 \\ &= \frac{4}{10}\sum_{k=1}^{10} {x_k}^2 + \frac{12}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k + \frac{90}{10} - 196 \\ &= 154 + 66 + 9 - 196 \\ &= 33 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} {s_w}^2 &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} {w_k}^2 - (\overline{w})^2 \\ &= \frac{1}{10}\cdot\sum_{k=1}^{10}(y_k-4)^2 - 3.5^2 \\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} {y_k}^2 - \frac{8}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k + \frac{160}{10} - 12.25 \\ &= 64.5 - 60 + 16 - 12.25 \\ &= 8.25 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} s_z s_w &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} z_k w_k - \overline{z}\,\overline{w} \\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\{(2x_k+3)(y_k-4)\} - 14\cdot 3.5 \\ &= \frac{2}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k y_k - \frac{8}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k + \frac{3}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k - \frac{120}{10} - 49 \\ &= 89 - 44 + 22.5 - 12 - 49 \\ &= 6.5 \end{aligned} $$ ・・・(答)

$$r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{3.25}{\sqrt{8.25}\sqrt{8.25}}=0.\dot{3}\dot{9}\quad\cdots\text{(答)}$$

$$r_{zw}=\frac{s_{zw}}{s_z s_w}=\frac{6.5}{\sqrt{33}\sqrt{8.25}}=\frac{6.5}{16.5}=0.\dot{3}\dot{9}\quad\cdots\text{(答)}$$

418

(1)

$$s^2=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n}$$
$$\geq\frac{p^2s^2K(p)}{n}$$

より，$\dfrac{p^2K(p)}{n}\leq 1$

よって，$K(p)\leq\dfrac{n}{p^2}$

(2)

得点が 47 点以下または 79 点以上の得点を x_i とすると，

$|x_i-\bar{x}|\geq ps$ より，$x_i-\bar{x}\geq ps$，$x_i-\bar{x}\leq -ps$

したがって，$\bar{x}=63$，$s=8$ より，

$x_i\geq\bar{x}+8p=63+8p=79$，$x_i\leq 63-8p=47$ $\quad\therefore p=2$

$K(p)\leq\dfrac{n}{p^2}$ および $n=300$ より，

得点が 47 点以下または 79 点以上の得点を取った生徒数は $K(2)\leq\dfrac{300}{2^2}=75$

すなわち 75 人以下である。

よって，得点が 47 点より高く 79 点より低い生徒は少なくとも $300-75=225$ 人いる。